RIASSUNTO E PUNTI SALIENTI DELLA RISOLUZIONE DEI LIMITI NELLE FORME INDETERMINATE.

$\frac{0}{0}$	1	$+\infty-\infty$	4	1^{∞}	7	$\log_{+\infty}(0^{+})$	10
$\frac{\infty}{\infty}$	2	0^{0}	5	$\log_{0^{+}}(+\infty)$	8	$\log_{+\infty}(+\infty)$	11
$0\cdot\infty$	3	∞^{0}	6	$\log_{0^{+}}(0^{+})$	9	$\log_{1^{\pm}} 1$	12

- **Limiti di funzioni razionali fratte;**

Caso 0/0 : Quando x tende ad un numero finito. Si elimina l'indeterminazione riducendo sia il numeratore che il denominatore ai minimi termini. Si fa questo effettuando una divisione tra polinomi con divisore dato da x (+|-) il numero cui tende. Si ottengono allora il polinomio resto moltiplicato il numero di volte in cui ci è entrato il divisore. Semplificando sopra e sotto tra loro questi fattori si possono avere 3 casi:

- se rimangono solo i polinomi resto si risolvono ed il limite è l<>0 finito;
- se rimane un polinomio divisore al numeratore allora siamo nel caso (l * 0) / l2 = 0
- se rimane un polinomio divisore al denominatore allora siamo nel caso l/(l2*0) = inf.

Caso inf/inf : In questo caso x tende a + o – infinito. Per risolvere questa indeterminatezza si deve mettere in evidenza la x con esponente massimo sia al numeratore che al denominatore. Poi si hanno i soliti 3 casi:

- se l'esponente della x a numeratore è = a quello della x a denominatore si semplificano entrambe le x e rimane a portare al limite i polinomi per ottenere un limite finito e <> 0
- se quello della x a numer. è > i quella della x a den. allora il numeratore va ad infinito più velocemente che il den. e quindi l = infinito
- se infine la x a num. è di ordine < rispetto a quella a den. allora il den. va ad infinito più velocemente e quindi l = 0.

E' sempre possibile ricondurre le forme indeterminate delle funzioni razionali e irrazionali a quelle dei casi precedenti (0/0, inf/inf, inf – inf);

- **Limiti di funzioni irrazionali**

Le funzioni irrazionali hanno l'incognita sotto radice e quindi vanno in genere razionalizzate.

Caso 0/0 : per risolvere questa indeterminatezza con le funz. irrazionali si deve ricorrere a scomposizioni, razionalizzazioni e manipolazioni algebriche.

Caso inf/inf : Come per le funzioni razionali fratte anche qui si va a controllare l'esponente più grande dell'incognita, mettendolo in evidenza sia al num. che al den.
Bisogna però tenere conto che gli esponenti delle incognite possono essere frazionari ovvero una radice cubica ad esempio equivale a elevare ad 1/3; Se si porta fuori radice un'incognita ricordarsi dei casi in cui và il modulo. Se in una somma algebrica per x che tende a inf si hanno infiniti di ordine diverso, prevale quello maggiore e si possono trascurare gli altri.

Caso inf-inf : In questo caso è possibile tornare all'indeterminazione inf/inf razionalizzando o in generale applicando alla generica funzione radice ennesima di A (+-) radice ennesima di B la formula $\sum_{i=1}^{n} (\mp 1)^{i+1} \cdot \sqrt[n]{A^{n-i} \cdot B^{i-1}} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, ..., n$ per trovare il fattore di razionalizzazione. Razionalizzando poi con questo valore si torna all'indeterminazione inf/inf che si risolve come visto in precedenza.

- **Per ricondurre le altre indeterminate a quelle conosciute**

Le altre forme indeterminate diverse da quelle appena viste si possono sempre ricondurre a quelle viste sopra, di cui abbiamo dimostrato la risolubilità.
Siano f(x) la prima funzione e g(x) la seconda:

- Da 0 * inf si arriva a 0/0 o inf/inf se si riscrive la funzione come $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ oppure $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ in modo da ottenere un rapporto uguale, nel primo caso a 0/0 nel secondo a inf/inf.
- Da + inf – inf si può passare a 0/0 o inf/inf riscrivendo la funzione nella forma $f - g = \frac{\frac{f-g}{f \cdot g}}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$
- Dalle forme indeterminate esponenziali O^0 inf^0 1^{inf} si passa alla forma e 0+-inf sfruttando la proprietà dei logaritmi per l'identità $x=b^{logb(x)}$. Per una forma indeterminata del tipo esponenziale $[f(x)]^{g(x)}$, applicando questa proprietà si ottiene la nuova forma $[f(x)]^{g(x)} = e^{\log [f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)}$ dalla quale si ottiene l'indeterminata 0 (+/-) inf che una volta risolta porta al limite e alla l, con l finito o infinito;
- Le forme indeterminate logaritmiche si possono trasformare in inf/inf o 0/0 utilizzando la formula del cambiamento di base nei logaritmi : $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ con la quale si passa al limite per logaritmi in base e. Da qui si possono appunto ottenere solamente le indeterminate (+/-)inf/(+/-)inf oppure 0/0, risolvibili.

LIMITI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Anche in questo caso il limite può presentarsi sotto 3 forme:
è immediato;
non esiste;
dà luogo a una delle forme indeterminate già viste;

Si tengano presenti i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}\, x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(1) (2) (3)

Se il limite è immediato si risolve come usuale sostituendo il valore cui tende x nella funzione f(x).
Se non esiste non si può determinare un risultato (es. lim x->+inf sen x).
Se invece si trova una forma indeterminata allora si può ricorrere a vari metodi:

1) Si scompone il limite in un prodotto del limite fondamentale (1) per una certa funzione resto.
   Altre scomposizioni deducibili dal limite fondamentale (1) sono:

   In generale allora: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, mx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, mx}{mx} \cdot m = m$

   In generale allora: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^n x}{x^n} = 1^n = 1$

   In generale allora: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, px}{\text{sen}\, qx} = \lim_{x \to 0} p \cdot \frac{\text{sen}\, px}{px} \cdot \frac{qx}{\text{sen}\, qx} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$

2) Si cerca in alternativa di trovare una scomposizione in fattori tramite le formule delle identità fondamentali trigonometriche (duplicazione, prostaferesi, somma…). In particolare se si individua cosa provoca l'indeterminazione (un elemento che s'annulla) è obiettivo portarlo a fattore sia a numeratore che a denominatore, in modo da semplificarlo e eliminare l'indeterminazione.
3) Si possono applicare i criteri dei confronti tra infiniti e infinitesimi. Sapendo infatti a cosa tendono i limiti fondamentali (1) (2) (3), si può procedere ad un confronto tra numeratore e denominatore e valutare quanto velocemente tendono a zero (ovvero di quale ordine d'infinitesimo sono rispetto a x).
   Es.

175. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^4 x}{1 - \cos x} = 0$

Infatti $\text{sen}^4 x$ è un infinitesimo del 4° ordine rispetto ad x:

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^4 x}{x^4} = 1$ (cfr. 169); $1 - \cos x$ è un infinitesimo del 2° ordine rispetto ad x:

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (cfr. 171). Quindi il numeratore è infinitesimo di ordine superiore al denominatore.

Nel caso in cui siano dello stesso ordine il limite è finito, mentre se num. è d'ordine minore che den. allora il lim. È inf.

DERIVATE PRIMI ACCENNI E DERIVATE FONDAMENTALI

La pendenza di una retta rispetto all'asse delle ascisse x è data dal rapporto della differenza delle coordinate di due suoi punti. La derivata di una funzione y=f(x) è la pendenza della funzione stessa in un particolare punto P d'ascissa x. Matematicamente si risolve facendo il rapporto incrementale tra un intervallo Δy / x dove il primo è la differenza tra le due ordinate, e il secondo tra le due ascisse. Dato che x2 tende a x1, Δx tende a zero quindi si può scrivere la derivata come $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = ..$.

Bisogna poi sempre tenere a mente i seguenti due teoremi fondamentali:

Teorema 1: $\frac{d}{dx}[C \cdot f(x)] = C \frac{d}{dx}[f(x)]$ *La derivata del prodotto di una costante per una funzione è data dal prodotto della costante per la derivata della funzione.*

Teorema 2: $\frac{d}{dx}[f_1(x) + f_2(x) + ...] = \frac{d}{dx}[f_1(x)] + \frac{d}{dx}[f_2(x)] + ...$

La derivata della somma di più funzioni è data dalla somma delle derivate delle singole funzioni.

In sostanza per effettuare il calcolo della derivata di una funzione (che viene a trasformarsi in un'altra), non si fa che applicare la definizione: a denominatore c'è sempre la differenza tra le ascisse, che tende a zero perché si cerca la derivata in un punto P particolare d'ascissa x=x1=x2. A numeratore esiste la differenza tra le ordinate relative alle x1 e x2 che si avvicinano. Questa differenza portata al limite (ovvero quando Δx = 0) è la derivata in x (la pendenza della funzione nel punto P). Per determinare questa differenza c'è in genere da effettuare manipolazioni sul numeratore, e tenere conto delle seguenti derivate fondamentali:

- La derivata di una costante è = 0

  $$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

- La derivata della funzione y=x è

  $$\frac{d}{dx}(x) = \frac{dx}{dx} = 1$$

- La derivata della funzione y=x^2 e:

  $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

- La derivata della funzione y=x^n e:

  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- La derivata della funzione y =x^n (con n razionale) è :

  $$n = \frac{5}{4}, \text{ quindi: } \frac{d}{dx}(x^{5/4}) = \frac{5}{4}x^{(5/4)-1} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

- La derivata della funzione y=cos x è:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta x}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}\right)=$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\,\mathrm{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}=-1\cdot\mathrm{sen}\,x=-\mathrm{sen}\,x$$

- La derivata della funzione y = sen x è uguale a cos x
- La derivata della funzione y=tg x è

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{tg}\,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)\cos x}\right]=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=\mathrm{tg}^2 x+1$$

- La derivata della funzione y = sec x è

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}}{\cos(x+\Delta x)\cos x}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{tg}\,x=\sec x\cdot\mathrm{tg}\,x$$

- La derivata della funzione y=e^x è

$$\lim_{\Delta x\to 0}e^x\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{e^0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Dove poi c'è da eliminare l'indeterminazione e diventa = a e^x

- La derivata della funzione y = e^(-x) è

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(-e^{-x}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\frac{1}{e^{\Delta x}}\right)=-e^{-x}\,\frac{1}{e^0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=-e^{-x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$
$$=[\text{cfr. es. 14}]=-e^{-x}\cdot\frac{1}{1}=-e^{-x}$$

- La derivata della funzione y = a ^ x è

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log a$$

- La derivata della funzione y = log x è

$$\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$$

- La derivata della funzione y = Sh x è

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Sh}\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}(-e^{-x})=$$
$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\mathrm{Ch}\,x$$

E il tutto è riassunto nella tabella sottostante :

	funzione $y = f(x)$	funzione derivata $\frac{d}{dx}[f(x)]$
1	C (costante)	0 (zero)
2	x^n	$n\,x^{n-1}$ (per qualunque n)
3	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
4	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
8	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$
9	$\operatorname{cosec} x$	$-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$
10	$\sec x$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$
11	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(\operatorname{ctg}^2 x + 1)$
12	e^x	e^x
13	e^{-x}	$-e^{-x}$
14	a^x	$a^x \log a$
15	e^{kx}	$k\,e^{kx}$
16	$\log x$	$\frac{1}{x}$
17	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log a}$
18	$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$
19	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$

	funzione	derivata
REGOLE DI DERIVAZIONE	$C \cdot f(x)$	$C \cdot f'(x)$
	$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$	$\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

DERIVATE DI UNA FUNZIONE DI FUNZIONI

In molti casi non è possibile applicare direttamente una delle formule della tabella precedente perché la y non è direttamente in funzione della x, ma sulla x sono invece applicate più funzioni: es. y = log (x^2 – 5); si può allora porre una nuova variabile z dipendente dalla x come uguale a x^2-5, in modo tale che y=log z; poi si fa la derivata di z rispetto a x e la derivata di y rispetto a z. I risultati si moltiplicano dando per transitività la derivata di y rispetto a x.
Naturalmente se sulla x sono definite più di una funzione (e operatori quali la radice) è necessario introdurre più di una nuova variabile dipendente, e poi con lo stesso meccanismo determinare le derivate fino ad arrivare alla y.
Un caso particolare è la derivata logaritmica. Infatti sia data y=f(x) allora la derivata di y rispetto a x è $\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.
Grazie a questa proprietà allora si può dare una formula per calcolare il caso generale di funzioni composte dal prodotto o dal rapporto di più funzioni sulla stessa variabile.
Sia y= (u*v)/(z*w) con u,v,z,w funzioni di x. Allora tenendo presente la proprietà sopra e facendo opportuni passaggi algebrici si ha $\frac{dy}{dx} = \frac{u \cdot v}{z \cdot w} \cdot \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{z} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dx} \right)$.
Questo è il caso generale. In particolare

- la derivata del prodotto di due funzioni è :

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot v \left(\frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' \right) = v u' + u v' \qquad [2.5.1]$$

Cioè: *la derivata del prodotto di due funzioni è data dalla somma dei prodotti della derivata di ciascuna funzione per l'altra funzione non derivata.*

- La derivata del rapporto i due funzioni è :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v} \cdot \left(\frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v' \right) = \frac{u'}{v} - \frac{u v'}{v^2} = \frac{u'v - u v'}{v^2} \qquad [2.5.3]$$

Cioè: *la derivata del rapporto tra due funzioni è data dalla differenza fra la derivata del numeratore per il denominatore non derivato e la derivata del denominatore per il numeratore non derivato, diviso il quadrato del denominatore.*

- La derivata del reciproco ci una funzione è :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \left(- \frac{1}{u} \cdot u' \right) = - \frac{u'}{u^2} \qquad [2.5.4]$$

Cioè: *la derivata del reciproco di una funzione è data dall'opposto del rapporto tra la derivata della funzione e il suo quadrato.*

E si può integrare la tabella con queste nuove derivate fondamentali:

n.	$y = f(x)$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
1	$\mathrm{Cosech}\, x$	$-\frac{\mathrm{Ch}\, x}{\mathrm{Sh}^2 x} = -\mathrm{Cth}\, x \cdot \mathrm{Cosech}\, x$
2	$\mathrm{Sech}\, x$	$-\frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}^2 x} = -\mathrm{Th}\, x \cdot \mathrm{Sech}\, x$
3	$\mathrm{Th}\, x$	$\frac{\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x}{\mathrm{Ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2 x} = 1 - \mathrm{Th}^2 x$
4	$\mathrm{Cth}\, x$	$\frac{\mathrm{Th}^2 x - 1}{\mathrm{Th}^2 x} = 1 - \mathrm{Cth}^2 x$

DERIVATE DELLE FUNZIONI INVERSE

Per funzioni inverse indichiamo quelle perciò si scambia la variabile indipendente con quella dipendente e viceversa. In generale se y = f(x) l'inversa è x = g(y).
In particolare le funzioni circolari hanno queste inverse:

$y = \text{arc sen}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{sen}\, y$	$y = \text{Sett Sh}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Sh}\, y$
$y = \text{arc cos}\, x$	è l'inversa di	$x = \cos y$	$y = \text{Sett Ch}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Ch}\, y$
$y = \text{arc tg}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{tg}\, y$	$y = \text{Sett Th}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Th}\, y$
$y = \text{arc cosec}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{cosec}\, y$	$y = \text{Sett Cosech}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Cosech}\, y$
$y = \text{arc sec}\, x$	è l'inversa di	$x = \sec y$	$y = \text{Sett Sech}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Sech}\, y$
$y = \text{arc ctg}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{ctg}\, y$	$y = \text{Sett Cth}\, x$	è l'inversa di	$x = \text{Cth}\, y$

Per calcolare la derivata di una funzione inversa si considera formalmente come può essere riscritta una derivata :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \qquad [3.1.1]$$

La [3.1.1] esprime che: *la derivata di una funzione è data dal reciproco della derivata della funzione inversa.*

Che in parole povere vuole dire che data una funzione inversa per calcolarne la derivata si fa il reciproco (1 fratto …), si sostituisce all'argomento della derivata la funzione di cui è l'inversa e si deriva.
Nella tabella sotto sono riportati i valori di alcune derivate i funzioni inverse fondamentali:

n.	$y = f(x)$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$	n.	$y = f(x)$	$\frac{d}{dx}[f(x)]$
1	$\text{arc sen}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	7	$\text{Sett Sh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2	$\text{arc cos}\, x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8	$\text{Sett Ch}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3	$\text{arc tg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	9	$\text{Sett Tgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$
4	$\text{arc cosec}\, x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{x^2-1}}$	10	$\text{Sett Cosech}\, x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{1+x^2}}$
5	$\text{arc sec}\, x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert \sqrt{x^2-1}}$	11	$\text{Sett Sech}\, x$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
6	$\text{arc ctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	12	$\text{Sett Cth}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$

LIMITI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Le funzioni goniometriche inverse (arcsen…) sono funzioni continue, in altre parole sono definite per qualunque valore dell'insieme di esistenza. Questo implica che il limite porterà all'esistenza in qualche punto. Come prassi per calcolare questi limiti si ricorre (a mente) al calcolo del valore inverso (più familiare): ad esempio lim per x che tende a –1 di arcsen x è più facilmente risolvibile se si pensa a qual è l'angolo che produce sen x = 1, ovvero – P greco /2. Nel calcolo di limiti con funzioni di questo tipo si arriva alle forme immediate, che sono risolvibili alla solita maniera (per sostituzione). Per le forme indeterminate il discorso si complica perché non esistono molte trasformazioni per le funzioni trig. inverse. Si procede allora o cercando di arrivare (con qualche trasformazione del tipo che si pone una variabile x = a qualche cosa) alle considerazioni su infiniti e infinitesimi; oppure si deve ricorrere ad altri metodi come la regola di De L'Hopital o lo sviluppo in serie di Taylor.
Nel primo caso sia da esempio quello seguente:

243. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{arc sen}\, x}{x}$ Posto $\text{arc sen}\, x = y \rightarrow x = \text{sen}\, y$ con $y \to 0$ per $x \to 0$ si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{arc sen}\, x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\text{sen}\, y} = 1 \quad (\text{cfr. §4.2})$$

Da esempi come questi si arriva a dire che :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc sen}\, px)^n}{qx^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (a1)} \\ \frac{p^m}{q} & \text{per } n = m \text{ (a2)} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (a3)} \end{cases}$$

(a1) Il numeratore è un infinitesimo di ordine superiore al denominatore.

(a2) Numeratore e denominatore sono infinitesimi dello stesso ordine.

(a3) Il numeratore è un infinitesimo di ordine inferiore al denominatore.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{arc tg}\, px)^n}{qx^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (b1)} \\ \frac{p^m}{q} & \text{per } n = m \text{ (b2)} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (b3)} \end{cases} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{(\text{arc cos}\, x)^{2n}}{q(1-x)^m} = \begin{cases} 0 & \text{per } n > m \text{ (c1)} \\ \frac{2^n}{q} & \text{per } n = m \text{ (c2)} \\ \infty & \text{per } n < m \text{ (c3)} \end{cases}$$

Mentre dove queste considerazioni non si possono fare si deve ricorrere alle altre regole dette in precedenza.

DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN FORMA IMPLICITA

Una funzione dove nessuna variabile è stata esplicitata si dice in forma implicita (x + y =2 , dove x è la variabile indipendente e y quella dipendente);
Per trovare la derivata di una funzione di questo tipo si può portarla in forma esplicita e poi derivare, ma non è necessario. Si ottiene lo stesso risultato derivando ambo i membri della funzione, considerando che derivando un elemento contenente la y si ha il risultato della derivata moltiplicato al simbolo dy/dx in quanto y è in funzione di x . Il fatto che nel risultato finale rimanga anche la variabile y non costituisce un errore. Per ovviarlo basta esplicitare la funzione, ma non è necessario se non espressamente richiesto dall'esercizio.
Per il resto le difficoltà sono le stesse viste in precedenza con in più l'esplicitazione, una volta derivata la funzione iniziale, del simbolo dy/dx.

$x^3 - y^2 + 3xy = 25$ Derivando ambo i membri rispetto ad x:

$$3x^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 3\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0 \rightarrow 3x^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 3y + 3x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow (3x - 2y)\frac{dy}{dx} = -3(x^2 + y) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2 + y)}{2y - 3x}$$

Al limite può essere richiesto di calcolare il valore della derivata in un particolare punto P. In generale si calcola prima il valore della derivata con la x e la y non sostituite. Poi se c'è da ricavarne il valore data l'ascissa x, si sostituisce questa nella funzione di partenza, e ci si ricavando i relativi valori della y. Dopo di che si riconsidera la derivata ottenuta e ci si sostituiscono x e y ottenendo uno o più valori della derivata. Altrimenti se è fornito anche il valore particolare dell'ordinata non si fa altro che sostituire questo valore, insieme alla x, nella derivata ottenuta.

Data la funzione $x^2 + y^2 = 4$ (fig. 4.1.1), calcolare:
1) il valore della derivata in $x = 1$
2) il valore della derivata in $x = 1$ ed $y = \sqrt{3}$

Essendo (cfr. la [4.1.5]) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, nel primo caso bisogna calcolare l'ordinata:

$1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ Sicché:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = -\frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si ottengono due valori perché i punti della curva corrispondenti ad $x = 1$ sono due: P e Q (fig. 4.1.1).

Nel secondo caso si ha:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\ y=\sqrt{3}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Quando su una funzione si effettua l'operazione di derivazione allora questa si trasforma in una nuova funzione (la derivata prima della funzione originale). Riapplicando in successione a questa derivata ancora un'altra volta l'operatore d/dx si ottiene la derivata seconda indicata con

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f''(x)$ è la derivata seconda di $f(x)$ e si indica con $\frac{d^2y}{dx^2}$

Che in generale per la derivata n-esima si scrive

In generale la derivata n^{esima} di $y = f(x)$ si indica con $\frac{d^ny}{dx^n}$

Caso particolare è la derivata ennesima di sen x che si riassume così:

Si deduce che $\frac{d^n}{dx^n}(\text{sen}\, x) = (-1)^{n+1}\, \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$

In generale per trovare la derivata n-esima di una funzione è necessario calcolare prima le n-1 esime derivate precedenti. Analogamente funziona per le funzioni in forma implicita, per le quali sono da tenere in considerazione le regole già viste.

Esempio:

$y = x^3 - 2x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$ Derivando ulteriormente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2 - 4x) = 6x - 4$$

LE APPLICAZIONI DELLA DERIVATA

Si sa che il coefficiente angolare di una retta passante per i punti P e Q è dato dalla differenza delle ordinate diviso la differenza delle ascisse. Questo è uguale a tg (α) dove α è l'angolo formato dalla retta con un'ipotetica asse x. Stabilito m = coeff. Ango. allora l'equazione della retta passante per il punto P è y – y1 = m (x – x1).
La perpendicolare a questa retta sarà una retta avente come coefficiente angolare 90° + m = tg (α+90°). Il che implica che m1 sarà uguale all'inverso del reciproco: - 1/m.

Sia y=f(x) una funzione e P un suo punto. $(dy / dx)_{x=x0}$ rappresenta la derivata della funzione calcolata in x0. Ovvero la tangente trigonometrica alla retta tangente alla curva in P. Per trovare l'ordinata di P si sostituisce allora x0 in f(x) t.c. y=f(x0) e P (x0, f(x0)). L'equazione della retta tangente in P alla curva sarà quindi $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ l'equazione della tangente in P a $y = f(x)$

E la sua perpendicolare (o normale) è $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Se la funzione è data in forma implicita vanno tenute in considerazione le regole viste, ma si procede allo stesso modo per determinare le equazioni.
I casi sono riassunti nella tabella sotto.

n.	Tipo funzione	Equazione tangente	Equazione normale
1	$y = f(x)$	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	se $f'(x_0) = 0$	$y = y_0$	$x = x_0$
2	$f(x, y) = 0$	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
	se $f'(x_0) = 0$	$y = y_0$	$x = x_0$

La derivata è utilizzata geometricamente per determinare i punti di massimo, minimo e flesso di una funzione y=f(x). Sia ad esempio quello sotto il grafico della funzione:

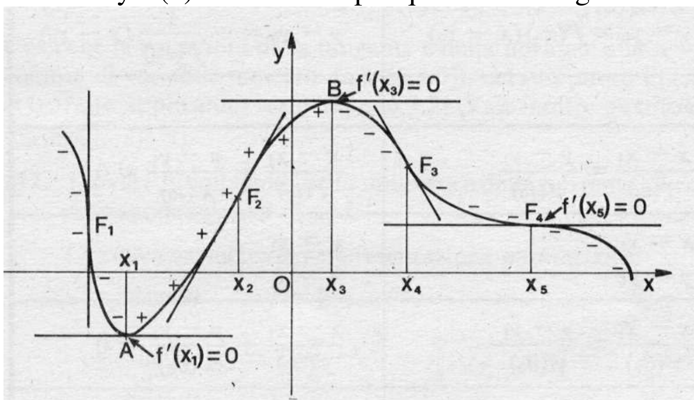


Fig. 6.4.2

Allora A è un punto di minimo, B di massimo e gli F di flesso. Riprendendo la definizione trigonometrica di derivata essa è la tangente all'angolo che la retta tangente alla curva in P forma con l'angolo delle ascisse. Quindi tg(α) sarà > 0 se $\alpha < 90°$ e al contrario se $\alpha > 90°$. In questo modo, si può dare un segno ad ogni derivata calcolata in ogni punto della funzione. + se l'angolo è acuto e – se l'angolo è ottuso.

Premesso questo è possibile allora individuare i punti di massimo e di minimo perché saranno quelli in cui :

- Punti di Minimo: le derivate dei punti con x minore di x0 avranno segno negativo e quelle con x maggiore di x0 avranno segno positivo;
- Punti di Massimo: le derivate dei punti con x minore di x0 avranno segno positivo e quelle con x maggiore di x0 avranno segno negativo.

Questi sono punti dove la derivata si annulla, perché la retta tangente alla curva è parallela all'asse x e quindi la tg è = infinito (α=90°).

Per procedere al calcolo dei massimi e dei minimi dunque si fa così:

- data la funzione y=f(x) si calcola la derivata;
- si cercano i punti di ascissa x per cui essa si annulla;
- questi punti costituiscono quelli candidati per essere massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale;
- noi vogliamo i primi due tipi quindi si ricerca dove la funzione cambia di segno. Per far questo si imposta la disequazione dy/dx > 0 e si verificano le ascisse dei punti in base alle condizioni per i massimi e i mini viste in precedenza;
- si determina infine le ordinate dei punti sostituendo le ascisse trovate nella funzione iniziale.

I punti di flesso sono punti in cui le derivate calcolate in un intorno della loro ascissa non cambiano di segno. Ad esempio il punto F1 ha tangente alla curva perpendicolare all'asse y e quindi equazione x=x1. Se si va a calcolare la derivata in un suo intorno allora questa sarà sempre di segno negativo perché formerà sempre un angolo ottuso con l'asse x. D'altra parte si può notare che i punti di flesso costituiscono un cambio di concavità nel grafico. Ad esempio in f1 si passa dalla concavità verso il basso (per x minori di x0) a concavità verso l'alto (per x maggiori).

Per risolvere algebricamente la questione di determinare dove c'è questo cambio di concavità e di conseguenza trovare i punti di flesso, è necessario studiare la derivata seconda della funzione. Questa infatti si comporta come la prima per i massimi e minimi, cambiando di segno e annullandosi nel punto di flesso infatti si può riassumere il suo andamento nello schema qui sotto:

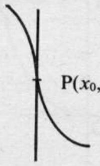
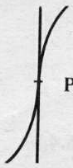
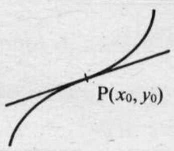
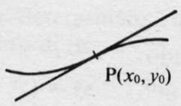
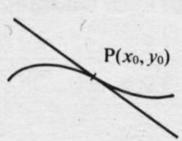
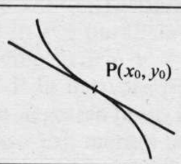
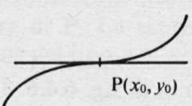
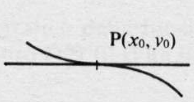
dato α = x ascissa del punto di flesso allora

$$
y''(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \begin{cases} y''(x) < 0 & \text{per} \quad x < \alpha \\ y''(x) > 0 & \text{per} \quad x > \alpha \end{cases} & \textbf{flesso ascendente:} \\ \\ \begin{cases} y''(x) > 0 & \text{per} \quad x < \alpha \\ y''(x) < 0 & \text{per} \quad x > \alpha \end{cases} & \textbf{flesso discendente:} \end{cases}
$$

Si possono avere inoltre 3 tipi di flesso ognuno dei quali è ascendente o discendente.

1) Flesso a tangente verticale: la tangente in P forma un angolo di 90° con l'asse delle ascisse ed è parallela all'asse y. In questo caso l'equazione della retta tg è x=h, la derivata prima in P è uguale a inf. e mantiene il segno per valori di x <> a x0; la derivata seconda invece non è definita in P ma cambia di segno al variare di x maggiore o minore di x0.
2) Flessi a tangente obliqua : in questo caso la tangente alla curva nel punto P forma con l'asse x un angolo acuto od ottuso. L'equazione della retta tangente è y-y1=m(x-x1) e m = tg(α) con tg(α) > 0 (α acuto) o < 0 (α ottuso). Anche qui la derivata prima mantiene il segno al variare della x da quella del punto P, mentre la derivata seconda cambia di segno determinando un flesso ascendente o discendente. Anche in questo caso si procede a calcolare la derivata 2°, si trovano i punti P dove si annulla e si vede se cambia di segno a destra e a sinistra del punto P, con le disequazioni. In quel caso è un flesso. Si può sapere se l'angolo che forma la tangente è acuto od ottuso verificando il segno della derivata prima. Invece sostituendo l'ascissa del punto di flesso P nella funzione si determina anche la sua ordinata e a quel punto sostituendo i valori trovati nella y-y1=m(x-x1) si trova l'equazione della retta tangente.
3) Flessi a tangente orizzontale: la tangente in P è parallela all'asse x il che implica che la derivata prima abbia valore 0. La derivata prima mantiene il suo segno in un intorno di P e invece la derivata seconda lo cambia. La tg in P ha equazione del tipo y=y1. Il procedimento per trovare tutti i dati è sempre lo stesso.

Possiamo riassumere quanto detto sui flessi nella seguente tabella:

n.	tipo di flesso	a sinistra di P	in P	a destra di P	equazione tangente
1	 P(x_0, y_0)	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' \to -\infty$ $y'' \to \infty$	$y' < 0$ $y'' > 0$	$x = x_0$
2	 P(x_0, y_0)	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' \to +\infty$ $y'' \to \infty$	$y' > 0$ $y'' < 0$	$x = x_0$
3	 P(x_0, y_0)	$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' > 0$ $y'' = 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
4	 P(x_0, y_0)	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y' > 0$ $y'' = 0$	$y' > 0$ $y'' < 0$	$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
5	 P(x_0, y_0)	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y' < 0$ $y'' = 0$	$y' < 0$ $y'' > 0$	$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
6	 P(x_0, y_0)	$y' < 0$ $y'' > 0$	$y' < 0$ $y'' = 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$
7	 P(x_0, y_0)	$y' > 0$ $y'' < 0$	$y' = 0$ $y'' = 0$	$y' > 0$ $y'' > 0$	$y = y_0$
8	 P(x_0, y_0)	$y' < 0$ $y'' > 0$	$y' = 0$ $y'' = 0$	$y' < 0$ $y'' < 0$	$y = y_0$

REGOLA DI DE L’HOPITAL

La regola De l’Hopital è applicata quando si arriva a una delle forme di limite indeterminato 0/0 o inf/inf. Sinteticamente la regola dice che il limite per x che tende a c di due funzioni f(x)/g(x) è uguale al limite delle loro derivate, e se questo è ancora una forma indeterminata allora si vanno a cercare le derivate ancora successive.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

Affinché la regola sia applicabile devono sussistere le seguenti ipotesi:

- il limite sia una delle forme indeterminate viste;
- le funzioni siano derivabili in un intorno di x = c, escluso al più x = c;
- la derivata di g(x) sia sempre diversa da 0 in un intorno di x = c;
- esista il limite tra le derivate.

Nel caso l’ultima ipotesi non ci sia, allora il limite può essere comunque trovato con i metodi classici. Quindi nel caso si voglia calcolare un limite con questa regola è necessario prima portarla ad una forma di indeterminatezza 0/0 o inf/inf (che è sempre possibile), poi si calcolano le derivate, si effettuano le semplificazioni ed eventualmente si riapplica la regola.

CALCOLO DEI LIMITI TRAMITE GLI SVILUPPI IN SERIE

Si è visto già che se si presentano forme indeterminate è possibile risolverle tramite le considerazioni su infiniti e infinitesimi. Cioè si controlla passando al limite se numeratore o denominatore vanno più, meno o insieme a 0 o inf. Tra due funzioni infinite prevale l’infinito di ordine maggiore, mentre tra due funzioni infinitesime prevale quella con infinitesimo di ordine minore. Quando però questo metodo risulta difficile e non si possono adoperare regole come quella di De l’Hopital, allora è conveniente usare gli sviluppi in serie di Mac Laurin se il lim è per x tendente a 0 oppure in caso tenda ad un c <> 0 si può usare lo sviluppo di Taylor. Però spesso è meglio ricondursi al primo caso trasformando il limite per y = x – c con x -> c e y -> 0.
Una volta applicati gli sviluppi in serie sia a numeratore che a denominatore, si considerano sono gli infinitesimi di ordine minore e si vede se il limite è finito o infinito o 0.
Gli sviluppi in serie più ricorrenti sono riportati qui sotto:

S.1 $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 \pm \ldots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

S.2 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

S.3 $a^x = 1 + x \log a + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \frac{(x \log a)^3}{3!} + \ldots$

S.4 $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

S.5 $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

S.6 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

S.7 $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2\,835} + \ldots$

S.8 $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4\,725} - \ldots$

S.9 $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

S.10 $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \ldots\right) \qquad (-1 < x < 1)$

S.11 $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

S.12 $\operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

S.13 $\log \operatorname{sen} x = \log x - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2\,835} - \ldots \qquad (-\pi < x < \pi)$

S.14 $\log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2\,520} - \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.15 $\log \operatorname{tg} x = \log x + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2\,835} + \ldots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.16 $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \frac{56x^7}{7!} + \ldots$

S.17 $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \ldots\right)$

S.18 $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \ldots \qquad \left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

S.19 $\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

S.20 $\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$

S.21 $\operatorname{Th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ldots$

LIMITI DI FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Si può riassumere quanto concerne il calcolo di questi limiti con i seguenti schemi:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ 0^+ & (0 < a < 1) \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0^+ & (a > 1) \\ +\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & (a > 1) \\ +\infty & (0 < a < 1) \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & (a > 1) \\ -\infty & (0 < a < 1) \end{cases}$$

Il caso particolare è il limite che porta alla definizione del numero e (2,7182..):

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

I limiti indeterminati di forme esponenziali si possono ricondurre alle forme indeterminate solite con questa formula :

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)} = e^{\frac{\log f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\frac{g(x)}{\frac{1}{\log f(x)}}}$$

Da alcune considerazioni allora si ha la seguente tabella che incrementa quella dei limiti già trovati.

$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^+$	1	$\lim_{x \to -1^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$	5
$\lim_{x \to -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$	2	$\lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^+$	6
$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^+$	3	$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^-$	7
$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^-$	4	$\lim_{x \to +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1^+$	8

più i due limiti fondamentali:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\log(1 + x)} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

SERIE

Data una successione di numeri reali a1,a2,a3… si chiama serie associata alla successione il simbolo a1 + a2 + a3 + …. I numeri a1,a2,a3 si dicono termini della serie.

La somma (o ridotta) ennesima dei primi n termini si indica con $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$
Dato che i termini tendono all'infinito il valore o somma della serie è da ricercarsi col limite per n che va a + inf. di S_n. Se questo limite esiste ed è finito si dice che la serie converge e il limite S è il valore (o somma) della serie. Quando invece S va a +/- inf. allora si dice che la serie diverge. Se infine per n che tende a inf. non esiste il limite, allora la serie è indeterminata.
Per vedere quindi se una serie converge bisogna prima calcolare la somma dei primi n termini, poi farne il limite e verificare che tenda a un numero finito.
La serie $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$ si chiama serie geometrica di ragione q. Nello studiare questa pericolare serie si deve tenere presente la formula $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$ e poi verificare i 4 casi possibili:

- q < |1| allora la serie converge e la sua somma è 1/(1-q);
- q > |1| e q = 1 allora la serie diverge;
- q = -1 la serie è divergente.

Per le serie vale la proprietà distributiva, ovvero se la serie a1+a2+a3+… è convergente e di somma S allora la serie ka1+ka2+ka3+… è sempre convergente e di somma kS. Per k<>0 altrettanto avviene anche per le divergenti e le indeterminate.
Una importante proprietà delle serie è che se convergono il loro termine generale tende a 0 al tendere dell'indice n all'inf. Non vale sempre questa proprietà nel verso contrario, ovvero la il termine n-esimo più tendere a 0 ma la serie non convergere. Se il termine generale non tende a 0 la serie comunque non può convergere.
Il resto di una serie si indica con R_p e corrisponde ad una serie di n termini in cui sono stati tolti i primi p. Per le serie resto si può dire che se converge la serie R_p allora converge anche la serie S_n e viceversa, qualunque sia p. Questo implica che per provare la convergenza o divergenza di una serie è equivalente mostrare cosa fa la serie dopo il p-esimo termine.
La somma del resto p-esimo di una serie convergente tende a 0 per p che tende a infinito.
Quindi *il metodo generale per vedere il carattere di una serie e controllare il limite per n -> inf della sua ridotta n-esima*. Per questo procedimento è piuttosto difficile in molti casi. E' più semplice, una volta stabilito che una serie converge, determinare una somma S approssimata.
Una serie a termini tutti positivi non può mai essere indeterminata.
Una serie molto importante è quella **armonica**, spesso utilizzata per confrontare le altre serie. La serie armonica è della forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ il cui termine generale tende a 0 ma la serie diverge.

Date due serie convergenti $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ...$ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + ...$ allora sono convergenti anche la loro somma, differenza sono convergenti. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + ...$. Il loro prodotto è sempre convergente a condizione che entrambe siano a termini reali positivi o a termini qualunque e assolutamente convergenti $\sum_{n=1}^{\infty}(u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1) = = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \dots$.

Per una serie a termini reali positivi vale la **proprietà commutativa** dei termini, cioè se si scambia l'ordine comunque la serie rimane convergente con somma S o divergente.

La serie P è una serie armonica di questa forma: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ e di solito è molto utilizzata nei criteri per determinare il carattere. Infatti in base al valore di P la serie diverge o converge : per p>1 la serie converge; per p<= di 1 la serie diverge.

Criterio di Gauss (o del confronto) : Le minoranti a termini positivi di una serie convergente convergono; le maggioranti a termini positivi di una serie divergente divergono.

Si tratta quindi di dimostrare che la serie in esame è una minorante o una maggiorante di qualche altra dal carattere noto che di solito è una serie armonica generalizzata o serie P.

Criterio del quoziente: Siano date due serie di cui di una v_n si conosce il carattere e di un'altra u_n si vuole scoprire. Allora se vale la relazione $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ e Vn è convergente, converge anche Un. Se vale la relazione $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ e Vn è divergente, diverge anche Un. Nella pratica ci si può riferire al limite dei rapporti $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \ell$. Se L è <> da 0 le due serie sono entrambe convergenti o entrambe divergenti; se L=0 e Vn è convergente allora converge anche Un. Se L=inf. e Vn diverge allora diverge anche Un.

Criterio di D'Alembert o del rapporto: Una serie Un a termini positivi è convergente se il rapporto fra un termine e il precedente è minore o uguale ad un numero q <1, mentre è divergente se è >= a q >1. Oltre a questo sistema si usa nella pratica portare al limite il rapporto come segue $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Verificando poi L si ha che se L<1 la serie converge, se è >1 la serie diverge e nulla si può dire (con questo criterio) se L=1.

Criterio di Cauchy o della radice : Una serie Un a termini positivi è convergente se la sua radice n-esima è minore o uguale ad un numero q <1, e divergente se è >= di q>1. Nella pratica anche qui si usa il limite per n->inf. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \ell$. Naturalmente se L<1 allora la serie è convergente, se L>1 la serie è divergente e se L=1 nulla si può dire.

Una serie si dice **a segni alterni** se i suoi termini con segno positivo sono ai posti dispari e quelli a segno negativo ai posti pari o viceversa. Una serie a segni alterni è convergente (**criterio di Liebnitz**) se i suoi termini presi in valore assoluto non crescono e se il limite del suo termine generale per n che tende a inf. tende a 0. In più l'errore che si commette prendendo il valore della sua ridotta n-esima invece che il valore S della serie è minore o uguale al valore in assoluto del primo termine n+1. Per le serie a segni alternate non vale la proprietà commutativa.

Se una serie contiene infiniti termini con segno qualunque e si prende la stessa serie considerando il valore assoluto dei termini allora se quest'ultima converge, converge anche la prima. In questo caso la serie si dice **assolutamente convergente**. Il contrario non vale sempre.

SERIE DI POTENZE

Le serie i funzioni sono serie i cui termini sono formati da funzioni f(x). Per un dato x allora queste funzioni assumono un certo valore. La serie di funzioni è allora convergente, divergente o indeterminata in base ai valori che le funzioni $f_n(x)$ assumono. Il campo di convergenza è l'insieme dei valori della x per cui la serie converge. Le serie di funzioni più importanti sono le serie di potenze della forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...,$ dove a1 … sono numeri reali. Queste serie possono convergere per qualsiasi valore della x, solo se la x = 0, oltre che per x = 0 anche per altri valori. In quest'ultimo caso è interessante individuare il numero positivo R tale che la serie data è assolutamente convergente per ogni valore della x all'interno dell'intervallo (-R, R), mentre per i valori esterni non converge. L'intervallo si chiama intervallo di convergenza della serie di potenze e R il raggio di convergenza. Negli estremi x = R e x =-R non si può stabilire a priori il comportamento della serie. Per calcolare questo raggio, data una serie di potenze, se i suoi coefficienti sono tutti diversi da 0 e esiste il limite $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$ allora il suo raggio di convergenza è:

nullo se l = +infinito; è + infinito se l = 0; è uguale a 1/l negli altri casi.

FORMULE UTILI PER LE SERIE E LE SUCCESSIONI

$$\sum_{i=1}^{n} [u_1 + (i-1)d] = n\left(u_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_1 q^{i-1} = u_1\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

1) Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione d;
2) Somma dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione d;
3) Somma dei primi n termini di una serie;
4) Somma del quadrato dei primi n termini di una serie;
5) Somma del cubo dei primi n termini di una serie;